

Très courte enquête sur l'extension non-triviale de la logique de propositions à la logique du premier et deuxième ordre*

Hector Zenil[†]

Institut d'Histoire et de Philosophie des Sciences et des Techniques
(Paris 1 Panthéon-Sorbonne/ENS Ulm/UMR 8590 CNRS)

Abstract

La construction formelle de la logique de second ordre ou calcul de prédicats consiste seulement à ajouter essentiellement de quantificateurs à la logique des propositions. Pourquoi la logique de deuxième ordre ne peut pas se réduire à celle de premier ordre ? Comment démontrer que certains prédicats sont d'ordre supérieur ? Quel type d'ordre corresponde au langage naturel ? Est-ce qu'il y a une position philosophique derrière chaque logique, même pour les logiques classiques ? Quelle position pour quelle puissance ? Ce sont des questions qu'on se pose et qu'on esquisse.

1 Contexte

La construction formelle de la logique de première ordre ou calcul de prédicats consiste à ajouter essentiellement de quantificateurs à la logique des propositions. Ces nouveaux quantificateurs (qui l'on peut être représentés

*Short essay written in 2005 in the context of a Master's course in philosophy and classical logic.

[†]hector.zenil-chavez@malix.univ-paris1.fr

par un seul car on arrive à l'autre par moyen de la négation) quantifient un deuxième type d'objets qui peuvent être des prédicats ou des relations. Ceux relations unaires peuvent se voir aussi comme des ensembles. D'un point de vue sémantique, cela revient à dire que l'on considère les fonctions et les prédicats comme des objets à part entière, au même titre que, par exemple, les variables des nombres.

2 Pourquoi la logique de deuxième ordre ne peut pas se réduire à celle de premier ordre

On peut penser qu'il suffit d'ajouter au domaine d'un langage de premier ordre les éléments sur lesquels les quantificateurs de la logique de deuxième ordre quantifient. Cependant, même si c'est possible, le système résultant est moins puissant que l'original puisque tous les ensembles ne sont pas définis par une formule. On sait que la logique de deuxième ordre a des propriétés différentes qui font une différence essentielle entre elles. Il s'agit des propriétés de complétude: la descriptive, la sémantique et la syntaxique.

2.1 Complétude descriptive

Une grande partie des mathématiques peut être formalisée en logique du premier ordre grâce à l'égalité. Par exemple, la théorie des groupes. Cependant, il existe des notions qui ne peuvent pas être saisies précisément par aucune théorie du premier ordre comme la propriété mathématique d'être infini ou d'être un nombre naturel. Nous disons que de telles notions ne sont pas axiomatisables au premier ordre. Par exemple il n'y a pas d'axiomatisation au premier ordre dont le seul modèle soit l'ensemble N des entiers naturels muni des opérations arithmétiques usuelles.

On peut construire une arithmétique, l'arithmétique de Peano (PA), mais il faudra un nombre infini d'axiomes, autrement elle le calcul de prédicats ne décrira pas complètement l'arithmétique car le schéma de récurrence est une collection infinie d'axiomes. Si on évite l'axiome de récurrence on produit une arithmétique moins puissante, l'arithmétique de Robinson. En fait le schéma de récurrence a besoin d'une logique plus puissante, une logique de deuxième

ordre. On ne peut pas saisir le schéma dans la logique du premier ordre parce qu'on ne peut pas quantifier que sur des variables, et les variables dénotent des valeurs, pas des prédicats sur les valeurs. On remplace couramment donc l'axiome de récurrence par une version plus faible. L'effet secondaire de ne pas pouvoir saisir complètement PA est qu'elle a d'autres modèles, les modèles non-standard de l'arithmétique dans le calcul de prédicats.

Le domaine de la complétude descriptive s'agit donc de pouvoir expressif pour saisir de manière finie, par exemple PA . La logique de deuxième ordre réalise cet objectif et donc elle est plus puissante dans ce sens que la logique de premier ordre, car son pouvoir expressif est plus grand.

2.2 Complétude sémantique

Il s'agit de l'impossibilité d'avoir un système de déduction comme celui de la logique de premier ordre. Il y a des modèles de deuxième ordre valides qui ne sont pas dérivés par le système de déduction. Dans les systèmes de premier ordre, on peut donner un nombre fini d'axiomes, de schémas d'axiomes ou de règles de déduction tels que toutes les preuves logiquement valides formulées avec la grammaire du calcul des prédicats du premier ordre soient obtenues à partir de ces principes. Par exemple, le système de déduction à la Hilbert où les quinze règles de déduction naturelle sont un système complet des principes de la logique du premier ordre. Cela veut dire que si p et q sont deux formules du calcul des prédicats, on dira que q est une conséquence logique de p lorsque tout modèle de p est aussi un modèle de q , autrement dit, pour tout modèle m , si p est vrai dans m alors q est vrai dans m .

D est incomplet, autrement dit s'il existe une formule F construite au moyen des connecteurs logiques, et des quantificateurs sur les formules tel que F soit vrai dans le modèle standard N de l'arithmétique, mais n'est pas prouvable dans D .

Cependant, l'ensemble de toutes les formules universellement valides de deuxième ordre n'est pas énumérable même récursivement. Ceci est une conséquence du théorème de l'incomplétude. Et donc quel que soit les tentatives pour définir un système de déduction, ce ne sera pas suffisant pour qu'il soit complet par rapport aux formules valides.

On sait depuis le travail de Gödel qu'une théorie formelle contenant l'arithmétique n'est pas complète et qu'elle contient des énoncés vrais indémonstrables.

2.3 Complétude syntaxique

Un système formel est dit complet syntactiquement si, en utilisant ses axiomes et ses règles, on peut montrer soit qu'il est un théorème du système ou que la négation est un théorème.

3 Les propriétés de la logique de deuxième ordre

On a vu qu'avec la logique de deuxième ordre, on gagne en complétude descriptive et en même temps qu'on perd les propriétés les plus importantes de la logique de premier ordre.

D'ailleurs, étant donné la taille du domaine des systèmes de deuxième ordre, la complexité de calcul est beaucoup plus importante. Elle est intraitable et sa validité ne peut pas être toujours calculable par une machine de Turing (seulement avec une machine oracle car les sous-ensembles infinis du domaine d'un système de deuxième ordre peuvent se voir comme les expansions décimales des nombres réels et nous savons que la plupart des nombres réels ont un degré de Turing mais il ne sont pas toujours dans la hiérarchie arithmétique, c'est à dire qu'ils n'ont pas d'expression sous forme de formule).

Pour vérifier qu'on gagne en pouvoir expressif, on peut voir qu'il suffit de la logique de deuxième ordre pour catégoriser le modèle standard de l'arithmétique et que tous les modèles non-standards de l'arithmétique de deuxième ordre sont isomorphes et donc il y a seulement une arithmétique de deuxième ordre contrairement à ce qui se passe dans le calcul de prédicats qui admet trop de modèles non isomorphes.

4 Comment démontrer que certains prédicats sont de deuxième ordre

Dire qu'un prédicat est de deuxième ordre signifie qu'il ne peut pas être écrit comme un énoncé de premier ordre. On connaît quelques exemples fournis par Quine. Pour démontrer qu'un énoncé ne peut pas être écrit dans le premier ordre, il suffit de voir qu'il n'est pas vrai dans l'interprétation standard de l'arithmétique de premier ordre mais qu'il est vrai dans l'arithmétique d'ordre supérieur. Pour réussir cela, il suffit d'arriver à une contradiction banale concernant les successeurs puisque tout nombre non-standard est un successeur de quelque autre tandis que dans le modèle non-standard le zéro n'est pas le successeur d'aucun autre nombre. Voici un exemple:

(1): "Soient certains pistoleros. Chacun d'eux a tiré sur le pied droit d'au moins l'un d'entre eux" (There are some gunslingers each of whom has shot the right foot of at least one of the others).

Qui peut être écrit en calcul de prédicats comme:

(2): $\exists X(\exists x Xx \wedge \forall x(Xx \rightarrow \exists y(Xy \wedge y \neq x \wedge Bxy)))$

Il s'agit alors de trouver une substitution de telle sorte que l'énoncé soit vrai dans le modèle non-standard et faux dans les modèles standards.

On fait la substitution $x=y+1$ dans la relation Bxy , car il s'agit toujours de se profiter de la caractéristique des nombres non-standards, qui ont la particularité que si a est un nombre non-standard, alors son prédécesseur est aussi un nombre non-standard. C'est à dire si a est non-standard, et $a=b+1$, alors b est non-standard. Donc le zéro n'est pas un nombre non-standard.

Donc l'énoncé (2) devient :

(3): $\exists X(\exists x Xx \wedge \forall x(Xx \rightarrow \exists y(Xy \wedge y \neq x \wedge x=y+1)))$

On démontre que :

$M \models (2)$ pour M non-standard n'est pas vrai dans le cas de $M' \models (2)$ pour M' standard.

Supposons que $M' \models (2)$ pour M' standard quand l'antécédent " $\exists X(\exists x Xx \wedge \forall x(Xx))$ " est vrai. Alors le conséquent " $\exists y(Xy \wedge y \neq x \wedge x = y + 1)$ " devrait être vrai.

Cependant si $\exists y(Xy \wedge y \neq x)$ et $x = y + 1$ $y = x - 1$. C'est à dire que y a un prédécesseur, ce qui est faux dans le cas $y = 0$. Donc contradiction.

Donc $M' \models (2)$ pour M' standard est faux.

Tandis que pour les nombres non-standards, il est vrai. Donc $M \models (2)$ pour M non-standard.

Alors (3) est effectivement un énoncé de deuxième ordre, donc (2) et (1) aussi.

5 Une position philosophique derrière chaque logique, même pour les logiques classiques ?

Il semble que le calcul de prédicats comme système de expression mathématique ne soit pas *philosophiquement neutre* car elle peut donner lieu à certaines interprétations non réalistes et à de modèles dites non-standards (qu'on n'avait pas l'intention de produire initialement). Quel sont les compromis entre expressivité, puissance et réalisme ? On pourrait dire si la logique de second ordre est plus ou moins réaliste ? et dans quel sens ?